Contrôle 1 Amgèbre2 : 2004/2005

Filières : SMP-SMA-SMC **Semestre 2**

Exercice I :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés.
2) a) Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer une matrice inversible $P \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice II :

Soit la matrice $A_m = \begin{pmatrix} m+2 & -2 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer les valeurs propres de A_m et les sous-espaces propres associés.
2) a) Montrer que A_m est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer une matrice inversible $P \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}A_mP$ soit diagonale.
3) Calculer $(A_{-2})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4) Soient les suites réelles (x_n), (y_n) et (z_n) définies par les relations :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -2y_n \\ y_{n+1} = -2y_n \\ z_{n+1} = x_n - y_n - z_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

avec $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ et $z_0 = -1$.

On note $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que : $U_n = (A_{-2})^n\, U_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Exercice III :

Soit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \ : \ \deg P \leq 2\}$ muni de sa base canonique $B = (1, X, X^2)$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par :

$$f(P) = P' + P \qquad \forall P \in \mathbb{R}_2[X]$$

où P' est le polynôme dérivé de P.

1) Déterminer la matrice de f relativement à la base B.
2) f est il diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Justifier votre réponse.

Faculté des Sciences Semlalia Marrakech

Correction :

Exercice I :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1°) - Les valeurs propres de A.

On a $\det(A - XI_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2-X & 1 & -1 \\ -4 & 2-X & -2 \\ 2 & -1 & 1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -X & 0 & -X \\ -4 & 2-X & -2 \\ 2 & -1 & 1-X \end{vmatrix}$

$$\det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -X \\ -2 & 2-X & -2 \\ 1+X & -1 & 1-X \end{vmatrix} = -X \begin{vmatrix} -2 & 2-X \\ 1+X & -1 \end{vmatrix} = -X\left(2 - (1+X)(2-X)\right)$$

$$= -X\left(2 - 2 + X^2 - X\right) = -X\left(X(X-1)\right) = X^2(1-X)$$

$P_A(X) = X^2(1-X)$ donc 0 est une valeur propre double et 1 une valeur propre simple.

Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $B_c = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.

• $E_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ Av = 0.v\} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ -4x + 2y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow E_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x - y + z = 0\}$
$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = 2x + z\} = \{(x, 2x+z, z) \quad x, z \in \mathbb{R}^2\}$
$= \{x(1,2,0) + z(0,1,1) \ / \ x, z \in \mathbb{R}\}$
$= \text{vect}\{v_1, v_2\}$ avec $v_1 = (1,2,0)$ et $v_2 = (0,1,1)$

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ Av = v\} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - z = x \\ -4x + 2y - 2z = y \\ 2x - y + z = z \end{cases}$ $\quad x = -z$, $\Rightarrow 2x = y$

$E_1 = \text{vect}\{v_3\}$ où $v_3 = (1, 2, -1)$.

2°) - a) - Toutes les racines de $P_A(X)$ sont dans $\mathbb{R}$ et on a $\dim E_0 = 2$ et $\dim E_1 = 1$ donc A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

b°) - $B = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice

[illegible] de B_c à B

Alors $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice II :

$$A_m = \begin{pmatrix} m+2 & -2 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & m+1 \end{pmatrix} \text{ où } m \in \mathbb{R}.$$

1°) – $P_{A_m}(X) = \det(A_m - XI_3) = \begin{vmatrix} m+2-X & -2 & 0 \\ 0 & m-X & 0 \\ 1 & -1 & m+1-X \end{vmatrix} = (m+1-X)\begin{vmatrix} m+2-X & - \\ 0 & m \end{vmatrix}$

$$P_{A_m}(X) = (m+1-X)(m+2-X)(m-X)$$

Trois valeurs propre distinctes simple : m, $m+1$ et $m+2$.

soient $E = \mathbb{R}^2$ et $B_c = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.

• $E_m = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, A v_1 = m v_1\} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)x - 2y = mx \\ my = my \\ x - y + (m+1)z = mz \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ y = y \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$

$E_m = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 ; x = y\} = \text{vect}\{(v_1)\}$

avec $v_1 = (1,1,0)$

• $E_{m+1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, A v_2 = (m+1) v_1\} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)x - 2y = (m+1)x \\ my = (m+1)y \\ x - y + (m+1)z = (m+1)z \end{cases}$

$\Leftrightarrow E_{m+1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\} = \text{vect}\{v_2\}$

avec $v_2 = (0,0,1)$;

• $E_{m+2} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, A v_3 = (m+2) v_2\} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)x - 2y = (m+2)x \\ my = (m+2)y \\ x - y + (m+1)z = (m+2)z \end{cases}$

$E_{m+2} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0 ; x = z\} = \text{vect}\{v_3\}$

avec $v_3 = (1,0,1)$.

2°) - a : A_m admet 3 valeurs propres distinctes dans $\mathbb{R}$ donc elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

b : $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice de passage de $\mathcal{B}c$ à $\mathcal{B}$. Alors on a :

$$D_m = P^{-1} A_m P = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 0 & 0 & m+2 \end{pmatrix}$$

3°) - $A_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D_{-2} = P^{-1} A_{-2} P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} V_1 = e_1 + e_2 \\ V_2 = e_3 \\ V_3 = e_1 + e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = V_1 - V_2 \\ V_2 = e_3 \\ e_3 = V_3 - e_1 = V_3 - V_1 + V_2 \end{cases}$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice inverse de P

On a $(D_{-2}) = P^{-1} A_{-2} P \Leftrightarrow A_{-2} = P D_{-2} P^{-1}$

$(A_{-2})^n = P (D_{-2})^n P^{-1}$ avec $(D_{-2})^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$(A_{-2})^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A_{-2})^n = \begin{pmatrix} 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ (-1)^{n+1} & (-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix}$$

4°) - On a $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ $\quad U_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}$

$U_{n+1} = A_{-2} U_n$ avec $A_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$U_{n+1} = A_{-2} U_n \Leftrightarrow U_n = A_{-2} U_{n-1}$

$= A_{-2}(A_{-2}) U_{n-1} = (A_{-2})^2 U_{n-1} = (A_{-2})^3 U_{n-2} = \dots = (A_{-2})^n U_1$

$U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

$U_n = (A_{-2})^n \; \forall n \in \mathbb{N}^*$ On peut le obtenir par récurrence.

b°) - On a $U_n = (A_{-2})^n U_0$ avec $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$(A_{-2})^n = \begin{pmatrix} 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ (-1)^{n+1} & (-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ (-1)^{n+1} & (-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^n \\ (-2)^n \\ (-1)^{n+1} (-1)^n - (-1)^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_n = (-2)^n \\ y_n = (-2)^n \\ z_n = (-1)^{n+1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exercice III :

1°) - $f(P) = P' + P \quad \forall \; P \in \mathbb{R}_2[X]$.

On a $f(1) = 0 + 1 = 1$; $f(X) = 1 + X$; $f(X^2) = 2X + X^2$

Par suite on a $A = M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2°) - $P_f(X) = P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 2 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^3$

$\lambda = 1$ est une valeur propre triple de f.

$E_1 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; AV_1 = V_1 \} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = x \\ y + 2z = y \\ z = z \end{cases}$

$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;;\; y = z = 0 \} = \text{vect}\{V_1\}$ avec $V_1 = \{1\}$

On a $\dim E_1 = 1 < 3$, donc f n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.